Grado en Física

Análisis Matemático I – Evaluación 2 - Soluciones

Ejercicio 1. a) Prueba, usando el teorema de Bolzano, que la ecuación

$$\ln x + 15x - 8x^2 + x^3 = 0$$

tiene al menos tres soluciones reales e indica tres intervalos disjuntos que las contienen.

b) Prueba, usando el teorema de Rolle, que dicha ecuación no puede tener más de tres soluciones reales.

Solución. a) Se trata de probar que la función $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida para todo $x > 0$ por

$$f(x) = \ln x + 15x - 8x^2 + x^3$$

se anula en al menos tres puntos distintos. Como es una función continua definida en un intervalo, sabemos, por el teorema de Bolzano, que dicha función se anula *al menos* una vez entre cada dos puntos en los que tome valores de signos opuestos. Tenemos que:

$$f(\mathrm{e}^{-4}) = -4 + 15\,\mathrm{e}^{-4} - 8\,\mathrm{e}^{-8} + \mathrm{e}^{-12} < -2 < 0, \ f(1) = 8 > 0, \ f(4) = \ln 4 - 4 < 0, \ f(5) = \ln 5 > 0$$

Deducimos que en cada uno de los intervalos $]\,\mathrm{e}^{-4}, 1[$, $]1, 4[$ y $]4, 5[$ hay *al menos* un cero de f.

b) Sabemos, por el teorema de Rolle, que entra cada dos ceros *consecutivos* de la derivada de una función la función puede anularse *como mucho* una sola vez. Por tanto, si la derivada de una función tiene k ceros distintos la función tiene *como mucho* $k + 1$ ceros distintos (pero puede que no tenga ninguno). Puesto que la función tiene derivadas de todos órdenes en $\mathbb{R}^+$ podemos usar este resultado como sigue. Calculando las derivadas de f tenemos:

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 15 - 16x + 3x^2, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 16 + 6x, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3} + 6$$

Para todo $x > 0$ es $f'''(x) > 0$. Deducimos que f'' tiene *como mucho* un cero, f' tiene *como mucho* dos ceros y f tiene *como mucho* tres ceros.

Por lo anterior deducimos que la ecuación del enunciado tiene exactamente tres soluciones reales. ☺

Comentario. Antes de empezar el examen recordé que es muy fácil comparar logaritmos con números, y en los ejercicios de este tipo que hemos hecho en clase he dicho y repetido que hay que probar con valores sencillos. Lo razonable es ir probando con $x = 1, 2, 3, ...$ para obtener

$$f(1) > 0, \ f(2) = \ln 2 + 6 > 0, \ f(3) = \ln 3 > 0, \ f(4) < 0, \ f(5) > 0.$$

Para obtener otro valor negativo lo natural es considerar valores próximos a cero. Por ejemplo $x = \mathrm{e}^{-4}$ vale, y también vale e^{-100}.

Más fácil todavía: es suficiente calcular $f(1) > 0$ y $f(4) < 0$ y observar que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ lo que implica que para valores de x próximos a 0 ha de ser $f(x) < 0$, y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ por lo que para valores de x suficientemente grandes debe ser $f(x) > 0$. Obtenemos así que la función tiene al menos un cero en cada uno de los intervalos $]0, 1[$, $]1, 4[$ y $]4, +\infty[$.

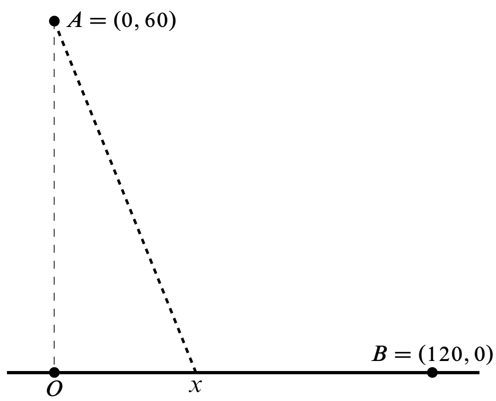
Los fallos en la primera parte son asombrosos. Hay quien considera los valores $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$ ¡logaritmos de números reales *negativos*! En este curso trabajamos con funciones reales de variable real ¿sabes lo que significa eso? Los logaritmos de números reales negativos no son números reales, son números complejos. En los números complejos no hay orden. En los números complejos no hay intervalos. No existe un teorema de Bolzano para funciones con valores complejos. También hay quien considera $f(0)$ ¡el logaritmo de 0! Eso está por inventar. Lo peor es que quienes proceden así afirman cosas como que $f(-1) > 0$ o que $f(0)=0$. Ya digo, asombroso. Algunos afirman que $f(2) < 0$ y $f(4) > 0$. Se lo inventan claro está porque no creo que se hayan molestado en comprobarlo. Pocos se toman el trabajo de definir f en los reales positivos. Algunos la definen en todo $\mathbb{R}^*$.

¡Fallos al enunciar el teorema de Bolzano! Algunos olvidan que dicho teorema se refiere a funciones *continuas* en un *intervalo*. Pues si no lo dices, el enunciado está mal.

Los fallos en la segunda parte se deben a que alguno olvidan dónde está definida f y no se dan cuenta de que $f'''(x) > 0$ porque es $x > 0$. ¿Recuerdas lo que he insistido en que nunca debes olvidar el conjunto donde está definida la función? O a que tratan de estudiar dónde se anula la derivada segunda lo cual no es inmediato. Varios afirman que si la derivada de una función se anula una vez (o dos veces) entonces la función se anula dos veces (o tres veces) lo cual es falso. Para otros las expresiones *"como mucho"* y *"al menos"* deben significar lo mismo porque las usan según les conviene. Alguien dice que f es una ¡función polinómica! y aclara, por si hubiera dudas, que de grado impar. Bueno. También hay, por increíble que parezca tratándose de una función tan sencilla, algunos errores al derivar. ☹

Ejercicio 2.

Estás en el desierto con tu vehículo en medio de la arena situado en un lugar cuyas coordenadas son $A = (0, 60)$ y tienes que ir a una ciudad cuyas coordenadas son $B = (120, 0)$. Por el origen $O = (0, 0)$ y por la ciudad B pasa una carretera recta asfaltada que los une. En carretera tu velocidad es de 120 kilómetros por hora y sobre la arena es de 80 kilómetros por hora. ¿Qué camino debes seguir para llegar lo antes posible a B?



Solución. El dibujo lo dice todo. La distancia que se recorre sobre la arena es $\sqrt{60^2 + x^2}$ y el tiempo que se invierte es $\dfrac{\sqrt{60^2 + x^2}}{80}$. La distancia que se recorre en la carretera es $120 - x$ y el tiempo que se invierte es $\dfrac{120 - x}{120}$. Por tanto la función que nos da el tiempo total en horas invertido en el viaje es:

$$f(x) = \frac{\sqrt{60^2 + x^2}}{80} + \frac{120 - x}{120}$$

Se trata de calcular el mínimo absoluto de dicha función en el intervalo $[0, 120]$. Tenemos que $f'(x) = \dfrac{x}{80\sqrt{60^2 + x^2}} - \dfrac{1}{120}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{60^2 + x^2}} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{x^2}{60^2 + x^2} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow 5x^2 = (120)^2 \Leftrightarrow x = \frac{120}{\sqrt{5}} = 24\sqrt{5}$$

Como la derivada solamente se anula en el punto $x_0 = 24\sqrt{5} \in [0, 120]$ debe tener signo constante en los intervalos $[0, x_0[$ y $]x_0, 120]$. Como $f'(0) = -1/120 < 0$ y

$$f'(120) = \frac{3}{2\sqrt{60^2+120^2}} - \frac{1}{120} > \frac{3}{2\sqrt{120^2+120^2}} - \frac{1}{120} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{1}{120} - \frac{1}{120} = \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} - 1\right)\frac{1}{120} > 0$$

deducimos que:

$$0 \leqslant x < x_0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f \downdownarrows \text{ en } [0, x_0] \Rightarrow f(x) > f(x_0)$$
$$x_0 < x \leqslant 120 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f \upuparrows \text{ en } [x_0, 120] \Rightarrow f(x) > f(x_0)$$

Concluimos que en x_0 se alcanza un mínimo absoluto.

Alternativamente, podemos razonar como sigue. La función f es continua en el intervalo cerrado y acotado $[0, 120]$, por el teorema de Weierstrass sabemos que debe alcanzar en dicho intervalo un máximo absoluto y un mínimo absoluto. Dichos valores o bien se alcanzan en los extremos del intervalo o se alcanzan en algún punto interior y, como la función es derivable, dicho punto debe ser un punto en el que la derivada primera se anule. Por tanto el mínimo absoluto de la función en $[0, 120]$ es el menor de los valores $f(0)$, $f(x_0)$ y $f(120)$. Tenemos que

$$f(0) = \frac{7}{4}, \quad f(120) = \frac{\sqrt{60^2+120^2}}{80} = \frac{60\sqrt{5}}{80} = \frac{3\sqrt{5}}{4}$$

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \frac{\sqrt{(24\sqrt{5})^2+60^2}}{80} + \frac{120-24\sqrt{5}}{120} = \frac{\sqrt{2^2\cdot 12^2\cdot 5 + 12^2\cdot 5^2}}{80} + 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} = \\ &= \frac{\sqrt{12^2\cdot 5\cdot 9}}{80} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} = \frac{36\sqrt{5}}{80} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} = \frac{9\sqrt{5}}{20} + \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}} = \frac{4+\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

Obtenemos así que $f(x_0) < f(120) < f(0)$. Lo que prueba que en $f(x_0)$ es el valor mínimo absoluto de f en $[0, 120]$ (y $f(0)$ es el máximo absoluto). ☺

Comentario. Errores increíbles en el planteamiento. Se supone que conociendo la velocidad con la que se recorre cada tramo es fácil calcular el tiempo total invertido en el viaje. Pues no. Al parecer eso es muy complicado porque son pocos los que plantean correctamente el ejercicio. Más de uno, en vez de dividir por la velocidad correspondiente multiplica por ella. Errores al derivar que no se pueden permitir en estudiantes de ciencias. Picaresca consistente en que, después de calcular el punto donde se anula la derivada, se afirma, sin hacer absolutamente ninguna comprobación, que la derivada es negativa a la izquierda de dicho punto y positiva a la derecha. Claro, tiene que ser así, pero como has visto eso no es totalmente evidente y requiere alguna comprobación y alguna explicación. No me gusta nada esa forma de proceder. ☹

Ejercicio 3. Calcula los límites:

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x \operatorname{sen} x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}} \qquad \text{b)}\ \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2+3)}\right)^{x^2 \ln x}$$

Solución. a) Para $x \to 0$ sabemos que $\mathrm{e}^{x^2} - 1 \sim x^2$ y $\operatorname{sen} x \sim x$, por lo que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1$$

Por tanto el límite es una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicaremos el criterio de equivalencia logarítmica. Tenemos que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x\operatorname{sen}x}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x^2}\frac{e^{x^2}-1-x\operatorname{sen}x}{x\operatorname{sen}x}=2\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x\operatorname{sen}x}{x^4}=$$
$$=2\lim_{x\to 0}\frac{2x\,e^{x^2}-\operatorname{sen}x-x\cos x}{4x^3}=2\lim_{x\to 0}\frac{2\,e^{x^2}+4x^2e^{x^2}-2\cos x+x\operatorname{sen}x}{12x^2}=$$
$$=2\lim_{x\to 0}\frac{12x\,e^{x^2}+8x^3e^{x^2}+3\operatorname{sen}x+x\cos x}{24x}=\frac{1}{12}\lim_{x\to 0}\left(12\,e^{x^2}+8x^2e^{x^2}+3\frac{\operatorname{sen}x}{x}+\cos x\right)=\frac{4}{3}$$

Donde hemos usado la equivalencia asintótica $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$ $(x\to 0)$ y aplicado tres veces la regla de L'Hôpital. Concluimos que:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x\operatorname{sen}x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=e^{4/3}.$$

b) Tenemos que:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2+3)}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x(x^2+3)}{2x(x^2+1)}=1$$

Donde hemos usado la regla de L'Hôpital. Por tanto el límite es una indeterminación del tipo 1^∞. Aplicaremos el criterio de equivalencia logarítmica. Tenemos que:

$$\lim_{x\to+\infty}x^2\ln x\left(\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2+3)}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\ln x\frac{\ln(x^2+1)-\ln(x^2+3)}{\ln(x^2+3)}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln(x^2+3)}\lim_{x\to+\infty}x^2\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{2x^2}\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}-1\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x^2}{x^2+3}=-1$$

Donde hemos usado una vez la regla de L'Hôpital y la equivalencia asintótica:

$$\lim_{x\to a}f(x)=1\implies\lim_{x\to a}\frac{\ln(f(x))}{f(x)-1}=1\implies\ln(f(x))\sim f(x)-1\quad(x\to a).$$

Concluimos que:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^2+3)}\right)^{x^2\ln x}=\frac{1}{e}.$$

☺

Comentario. Errores más comunes: equivocarse al derivar y errores de cálculo. Sustituir equivalencias asintóticas en sumas. ¿Cuántas veces habré repetido que eso no puede hacerse? No es verdad que $e^{x^2}-1-x\operatorname{sen}x$ sea asintóticamente equivalente a $e^{x^2}-1-x^2$ para $x\to 0$. De hecho, se verifica que $e^{x^2}-1-x^2\sim\dfrac{x^4}{2}$ y $e^{x^2}-1-x\operatorname{sen}x\sim\dfrac{2x^4}{3}$ para $x\to 0$. Por tanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x\operatorname{sen}x}{e^{x^2}-1-x^2}=\frac{4}{3}\neq 1$$

y dichas funciones no son asintóticamente equivalentes. Insisto: ***solamente puede sustituirse una función por otra asintóticamente equivalente cuando dicha función multiplica o divide a todas las demás***

que intervienen en el límite. Otro error es el siguiente:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x\operatorname{sen} x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x^2}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

Eso no es cierto. Basta pensar un momento para darse cuenta de que ese tipo de sustituciones no se pueden hacer. Es decir $f(x)\sim h(x)$ para $x\to a$ no permite afirmar que $f(x)^{g(x)}\sim h(x)^{g(x)}$ para $x\to a$. Por ejemplo, cualquier función que verifique $\lim_{x\to a} f(x)=1$, verifica de forma evidente que $f(x)\sim 1$ para $x\to a$, pero no es cierto que $f(x)^{g(x)}\sim 1^{g(x)}=1$ para $x\to a$. Si así fuera no existiría la indeterminación 1^∞. Lo repito otra vez: ***solamente puede sustituirse una función por otra asintóticamente equivalente cuando dicha función multiplica o divide a todas las demás que intervienen en el límite***.

El límite primero es más trabajoso si no se hacen las sustituciones $1-\cos x\sim x^2/2$ y $\operatorname{sen} x\sim x$. Pero aún así también puede hacerse con facilidad, de hecho, algunos, pocos, lo han hecho de esa manera. Otros errores son más extraños. Hay quien dice que $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{1-\cos x}=1$. Hay quien, en un arrebato de inspiración, aplica la regla de L'Hôpital para calcular el límite $\lim_{x\to+\infty} x^2\ln x$ y obtiene como curioso resultado que dicho límite es ...¡igual a 0!¡Si no lo leo no me lo creo! Hay quien aplica la regla de siempre para calcular el límite $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2+3}$ porque eso debe ser alta matemática. El segundo límite no lo ha hecho nadie. ☹

Impresión general. Los resultados han sido muy malos, incluso peores que los de la primera evaluación. Además de los errores concretos antes comentados, que pueden evitarse estudiando, hay otros más generales y más difíciles de evitar y que afectan a una gran mayoría. Me refiero a la poca habilidad para hacer cálculos sencillos y para simplificar correctamente y, sobre todo, a la dificultad para expresar de forma clara y correcta razonamientos matemáticos. Es frecuente que al enunciar algún resultado como, por ejemplo, el teorema de Bolzano o el de Rolle, se olviden hipótesis como la continuidad o la derivabilidad sin las cuales dichos teoremas no son ciertos. Si al enunciar un teorema olvidas alguna de sus hipótesis eso significa que no lo has estudiado o que no lo entiendes y, claro, estás enunciando algo falso. En matemáticas no todo vale.

Lo que está fuera de toda duda es que, salvo muy contadas excepciones, dedicáis muy poco tiempo al estudio. Me consta también que hay algunos que sí estudian y no logran buenas calificaciones. Lo he dicho más de una vez: las matemáticas se estudian haciendo ejercicios y resolviendo problemas. Para eso, claro está, previamente hay que conocer y entender bien las herramientas que vas a utilizar, es decir, esos resultados más útiles que se llaman *teoremas*. En mi libro hay una gran variedad de ejemplos y de ejercicios resueltos y propuestos y dispones de las tutorías (que casi nadie usa) para consultar dudas. He puesto en el SWAD ejercicios de exámenes y de evaluaciones de otros cursos resueltos y comentados (creo que pocos los habéis leído) para que sepáis lo que se espera que hagáis en los exámenes. Me constan que en otras asignaturas ni siquiera permiten llevarse las hojas con las preguntas del examen y, desde luego, no ponen a vuestra disposición exámenes resueltos y comentados. En fin, hago lo que puedo para ayudar. ¿Y tú? ¿Estudias o trabajas?